Módulo 1

Un poco de Lógica...

Introducción

La matemática exige un lenguaje claro y preciso, es decir que no admita ambigüedades. Para lograrlo, se vale de la lógica simbólica o lógica matemática, que proporciona significado exacto a cada expresión y da para cada símbolo un significado único.
Haremos un estudio muy elemental de la lógica, que servirá para poder manejar mejor los símbolos, conceptos y enunciados que estudiaremos durante este curso.

Para ello fijaremos un leguaje común, comenzando por establecer que entendemos cuando usamos la palabra ***proposición***. Podemos dar una idea de ***proposición*** diciendo que es *toda sucesión de palabras de la cual tiene sentido decir si es verdadera o falsa*, por ejemplo:

- 5 es un número impar.
- Un cuadrado tiene cinco lados.
- En Concepción del Uruguay hay una casa construida con exactamente 23.265 ladrillos.

Evidentemente podemos decir que la primera proposición es verdadera, la segunda, falsa, y aunque no sabemos si la tercera es verdadera o falsa, tiene sentido afirmar que sea verdadera o falsa.

En cambio, si analizamos las siguientes expresiones:

- ¿A qué hora llegaste?
- ¡Felicitaciones!
- La pinza sirve para.
- Un por desde nada con muy.

Observamos que las dos primeras expresiones tienen sentido claro, pero lo que no tiene sentido es afirmar que sean verdaderas o falsas, por lo tanto no son proposiciones. La tercera expresión tiene "algo de sentido", pero éste aparece incompleto (nos preguntaríamos ¡*sirve para ¿qué?*!), y no tiene sentido afirmar que sea verdadera o falsa, por lo que tampoco es proposición, y la última carece totalmente de sentido en sí misma, o sea que menos aún tiene sentido preguntarse por su veracidad o falsedad.

ACTIVIDAD 1

Decir cuáles de las siguientes expresiones son proposiciones:

a) La química es una ciencia experimental.

b) Bogotá es la capital de Honduras.

c) ¿Cuál es la temperatura ambiente?

d) Entró desde ante por.

e) 3 + 5 = 4.

f) 3 + 5 = 8.

g) En el año 2022 habrá una importante reforma en la economía.

Según vimos, una proposición puede ser verdadera o falsa. Entonces según sea el caso, diremos que su ***valor de verdad*** es verdadero **(V)** o falso **(F)** respectivamente.

Así, por ejemplo, si enunciamos la proposición: *5 es un número impar* su valor de verdad es **V**, en cambio para la proposición: $2^3 < 3$ el valor de verdad es **F**.

Representaremos las proposiciones con las letras *p*, *q*, *r*,...

Por ejemplo:

p = *El sol es una estrella;* q = $\sqrt{2}$ *es un número irracional;* r = $5 < 2$; ... etc.

ACTIVIDAD 2

Determinar el valor de verdad de las proposiciones de la *ACTIVIDAD 1*.

Operaciones con proposiciones

Así como en aritmética se estudian las operaciones entre números, la lógica estudia las operaciones entre proposiciones, estas constituye el cálculo proposicional. Veamos cuáles son las operaciones que estudiaremos:

- *Negación*

Se llama ***negación*** de una proposición *p* a la proposición que se obtiene anteponiendo la palabra "no" a la proposición *p*. La negación de *p* se simboliza "$-p$" y se lee "no *p*".

Ejemplo: *p* = enero es un mes caluroso

La negación será: $-p$ = *no enero es un mes caluroso*, pero esto no nos "suena bien" en nuestro idioma, por lo que enunciamos la negación de la siguiente forma:

$-p$ = *enero no es un mes caluroso*.

Observemos que la negación de una proposición verdadera es una proposición falsa, y recíprocamente, la negación de una proposición falsa, es una proposición verdadera.

Podemos resumir esta conclusión en la siguiente ***tabla de verdad***:

p	$-p$
V	F
F	V

ACTIVIDAD 3

Negar las siguientes proposiciones:

a) 7 > 4.

b) La Luna es un planeta.

c) Francia es un país asiático.

- *Conjunción*

Otra de las operaciones que nos ocupa es la ***conjunción*** o ***producto lógico***, que resulta de reunir dos proposiciones para obtener una tercera:

Así, dadas las proposiciones simples:

p = 2 es un número par;

q = Lima es la capital de Perú;

se puede formar la proposición compuesta:

$p \wedge q = p \cdot q =$ *2 es un número par y Lima es la capital de Perú*.

La proposición $p \wedge q$ se lee "***p y q***"; y su valor de verdad es verdadero solamente si p y q son ambas verdaderas, siendo falso en los demás casos.

Por ejemplo, la proposición:

2 es un número par y Brasilia es la Capital de Perú.

es falsa, porque la segunda proposición que la compone lo es.

También resulta falsa la proposición:

Entre Ríos es un país y 3 + 2 = 7

porque las dos proposiciones que la componen son falsas.

La tabla de verdad correspondiente a la conjunción es:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	F

ACTIVIDAD 4

Hallar el valor de verdad de las siguientes conjunciones:

a) $\sum_{k=1}^{4} k = 10$ y 3 + 3 = 2.

b) 5 – 9 = –4 y todo paralelogramo tiene sus lados opuestos paralelos.

c) 4 es un número primo y $2^3 = 3^2$.

- *Disyunción inclusiva o suma lógica débil*

De la misma manera que antes pero relacionando las proposiciones con una "*o*", se tiene la ***disyunción inclusiva*** o ***suma lógica débil***, que se simboliza $p \vee q$, y que se lee "***p o q***".

La proposición $p \vee q$ es falsa solamente si las dos proposiciones *p* y *q* son falsas, siendo verdadera en todos los demás casos. Su tabla de verdad es:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
F	V	V
V	F	V
F	F	F

Por ejemplo, la proposición:

$p \vee q$ = *2 es un número par o Brasilia es la Capital de Perú*

es verdadera, porque la primera proposición lo es (aunque la segunda sea falsa); y la proposición:

$p \vee q$ = *"2 + 2 = 9 o 4 > 7"*

es falsa porque ambas proposiciones son falsas.

ACTIVIDAD 5

Hallar el valor de verdad de las siguientes disyunciones débiles:

a) Jueves es un mes del año o 12 es divisible por 3.

b) 5 – 9 = –4 o todo paralelogramo tiene sus lados opuestos paralelos.

c) 4 es un número primo o $2^3 = 3^2$.

- *Disyunción exclusiva o suma lógica fuerte*

La ***disyunción exclusiva*** o ***suma lógica fuerte*** entre las proposiciones *p* y *q* se simboliza $p \veebar q$. La veracidad de esta proposición es falsa si las proposiciones componentes son ambas verdaderas o ambas falsas, y verdadera si ellas tienen distinto valor de verdad.

La proposición $p \veebar q$ equivale a decir "***p* o bien *q***".

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
F	V	V
V	F	V
F	F	F

Ejemplos:

$p \veebar q$ = *"2 + 2 = 9 o bien 4 > 7"*

es falsa, porque ambas proposiciones son falsas.

$p \veebar q$ = *4 es múltiplo de 2 o bien 3 es múltiplo de 2*

es verdadera, porque la primera de las proposiciones es verdadera y la segunda es falsa.

ACTIVIDAD 6

Hallar el valor de verdad de las siguientes disyunciones fuertes:

a) Chascomús está en Santa Fe o bien 5 – 5 < 3 + 4.

b) Un ángulo recto mide 90° o bien 25 es un cuadrado perfecto.

c) 5 es impar o bien 3 es par.

d) 9 es múltiplo de 8 o bien un ángulo obtuso mide 30°.

- *Condicional o implicación*

Otra operación muy importante entre proposiciones es el ***condicional*** o ***implicación*** que se simboliza $p \Rightarrow q$. En el lenguaje hablado tiene la forma "**si *p*, entonces *q***" o también "*p* implica *q*". Ésta es falsa solamente cuando *p* es verdadera y *q* falsa. Su tabla de verdad es:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	V

En $p \Rightarrow q$, la proposición *p* se llama *antecedente* y la *q consecuente* de la implicación.

Ejemplos:

a) *p = 7 es un número negativo*. (falso)

q = 3 es un número par. (falso)

$p \Rightarrow q$ = si 7 es un número negativo entonces 3 es un número par, es una proposición verdadera, por ser *p* y *q* falsas.

b) *p = 7 es un número negativo*. (falso)
q = un triángulo isósceles tiene dos lados congruentes. (verdadero)

$p \Rightarrow q$ = si 7 es un número negativo, entonces un triángulo isósceles tiene dos lados congruentes; es una proposición verdadera, por ser falso el antecedente y verdadero el consecuente.

c) *p =* $\sqrt{3}$ *es un número irracional*. (verdadero)
q = 7 *es un número negativo.* (falso)

$p \Rightarrow q$ = si $\sqrt{3}$ *es un número irracional, entonces 7 es un número negativo*; es una proposición falsa, pues es un condicional de antecedente verdadero y consecuente falso.

ACTIVIDAD 7

Analizar si los siguientes condicionales son verdaderos o falsos:

a) Si $4 < 7$ entonces $2 > -4$.

b) Si dos rectas paralelas se cortan en ángulo recto, entonces Chubut es una provincia argentina.

c) Si en el M.R.U, la velocidad es constante, entonces $(1 - 3)^2 + 2 = -2$.

- *Bicondicional o doble implicación*

El ***bicondicional*** o ***doble implicación $p \Leftrightarrow q$*** se define como $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$, es decir, la conjunción de dos condicionales, y es verdadera cuando *p* y *q* tienen el mismo valor de verdad. La expresión coloquial es "***p si y sólo si q***".

Su tabla de verdad es:

p	*q*	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	V

Ejemplo:

p = 6 es un número par.

q = 3 es un número primo.

$p \Leftrightarrow q$ = 6 es un número par, si y sólo si 3 es un número primo es verdadera, pues las proposiciones *p* y *q* son verdaderas.

Condicionales y teoremas

Entre las operaciones lógicas, tiene especial importancia la implicación, pues aparece continuamente en el enunciado de teoremas y de propiedades.

Como ejemplo consideremos un conocido teorema de geometría que seguramente habrán estudiado en la secundaria:

"La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 2 rectos"

Pero... ¿Dónde está el condicional?...

Si transformamos un poco el enunciado, veremos que tiene la forma de un condicional:

"Si α, β y γ son los ángulos interiores de un triángulo, entonces $\alpha + \beta + \gamma = 2R$"

¡Ahora sí!, tenemos claramente un condicional donde el antecedente es:

p = α, β y γ *son los ángulos interiores de un triángulo*,

y el consecuente es:

$$q = \alpha + \beta + \gamma = 2R.$$

Es más, el antecedente es la **hipótesis** del teorema y el consecuente la **tesis** del mismo.

A propósito... ¿Recuerdan qué son la hipótesis y la tesis de un teorema?... si no, es hora de averiguarlo...

Algo más acerca del condicional: Condiciones necesarias y suficientes

Si $p \Rightarrow q$ es una proposición verdadera, se dice que:

*p es **condición suficiente** para q*

Es lo mismo que decir: que se cumple *q* <u>si</u> se cumple *p*.

Y también que: *q es **condición necesaria** para p*

Es lo mismo que decir: que se cumple *p* <u>sólo si</u> se cumple *q*.

Pero... ¿Qué quiere decir esto?.... tratemos de explicarlo:

Por ejemplo:

Si un número es múltiplo de 4, entonces es múltiplo de 2.

Ser múltiplo de cuatro es condición suficiente para que ese número también sea múltiplo de 2 (basta con saber que es múltiplo de 4 para afirmar sin dudar que también es múltiplo de 2). En cambio, ser múltiplo de 2 es **condición necesaria** para ser múltiplo de 4 (no existe ningún múltiplo de 4 que no lo sea también de 2).

Un poco de Conjuntos...

Conjuntos – Elementos – Pertenencia

En nuestras conversaciones diarias empleamos en muchas oportunidades la palabra *conjunto* y, entendemos claramente a qué nos referimos cuando decimos:

un conjunto de lápices, un conjunto de flores,
un conjunto de palabras, un conjunto de países, etcétera.

Pero si se trata de conceptos matemáticos, debe fijarse con exactitud el significado de cada término para no dar lugar a contradicciones o interpretaciones equívocas.

Parece natural comenzar por una definición de conjunto. Para ello, debemos utilizar términos que hayan sido definidos en base a otros conocidos y estos a su vez, definidos en base a otros anteriores.

Por ejemplo, podríamos definir: "Conjunto es una colección de objetos"
¿y qué es colección? "Colección es una reunión de objetos"
¿ y qué es reunión? "Reunión es una agrupación de objetos"
¿ y qué es agrupación? "Agrupación es un conjunto de objetos"

y así hemos vuelto al punto de partida sin aclarar totalmente el significado de la palabra conjunto.

Es decir que, si pretendemos definirlo todo, entramos en un retroceso infinito o en un círculo vicioso. Los matemáticos evitan este problema eligiendo algunos términos que aceptan, **sin definir**, al comenzar el desarrollo de una teoría. Se los llama **conceptos primitivos** o **conceptos fundamentales** de la teoría.

Formemos algunos conjuntos:
a) tu lápiz, tu regla, tu cuaderno.
b) Entre Ríos, Corrientes, Misiones.

Tu lápiz, tu regla y tu cuaderno, son los **elementos** del primer conjunto.

Tu lápiz **pertenece** al primer conjunto.

Mi compás **no pertenece** a ese conjunto.

Entre Ríos, Corrientes y Misiones son los **elementos** del segundo conjunto.

Corrientes **pertenece** al segundo conjunto. Córdoba **no pertenece** a este último conjunto.

Hemos usado, sin definirlos, otros dos conceptos: **elemento** y **pertenencia**.

Es decir, consideramos que:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Conjunto}\\ \text{Elemento}\\ \text{Pertenencia}\end{array}\right\} \text{ son } \textbf{conceptos primitivos}.$$

Un matemático hace uso de distintos lenguajes:

Un **lenguaje coloquial** con el que se expresa naturalmente en forma oral o escrita.

Un **lenguaje simbólico** que ofrece la ventaja de ser más sintético, más claro y más riguroso para las demostraciones y razonamientos; y

Un **lenguaje gráfico** que sirve para aclarar o interpretar algunos conceptos o situaciones.

En lenguaje coloquial nombramos conjuntos como los siguientes:

a) Entre Ríos, Corrientes, Misiones.

b) abril, junio, septiembre, noviembre.

En estos ejemplos, se enumeran uno a uno los elementos que forman cada conjunto.

Se dice que un conjunto está definido por **enumeración** o por **extensión** cuando se enumeran uno a uno los elementos que lo forman.

Observemos esta otra forma de mencionar conjuntos coloquialmente:

a) provincias de la Mesopotamia Argentina.

b) meses de 30 días.

En estos ejemplos, si bien no se mencionan cada uno de los elementos que componen el conjunto, se da una cualidad o propiedad que caracteriza a los elementos del conjunto y sólo a ellos.

Se dice que un conjunto está definido por **comprensión** cuando se da un criterio que permite decidir con certeza si un elemento pertenece o no al conjunto.

Según convenga, se puede expresar un mismo conjunto por **comprensión** o por **enumeración**.

Por ejemplo: a) notas musicales, o bien: do; re; mi; fa; sol; la; si.

b) vocales fuertes, o bien: a; e; o.

Es evidente que, cuando se trata de conjuntos de *muchos* elementos resulta más simple definirlos por **comprensión**.

Por ejemplo: los habitantes de nuestro país.

los ríos americanos.

Lenguaje simbólico. Notación

Para representar simbólicamente a los conjuntos, los elementos y la relación de pertenencia tendremos en cuenta las siguientes convenciones:

Los conjuntos se designan con letras mayúsculas de imprenta.

Los elementos que forman un conjunto se encierran entre llaves.

En un conjunto no pueden figurar elementos repetidos.

A = {Entre Ríos, Corrientes, Misiones}, expresión que se lee: "A es el conjunto formado por Entre Ríos, Corrientes, Misiones".

Para indicar que un elemento **pertenece** al conjunto se escribe el signo: $\in$. Para indicar que un elemento **no pertenece** al conjunto se escribe el mismo signo pero tachado: $\notin$.

Si a = Entre Ríos, entonces $a \in A$; que se lee: a **pertenece** a A.

Si m = Chaco, entonces $m \notin A$; que se lee: m **no pertenece** a A.

Si el conjunto está determinado por alguna propiedad que deben cumplir sus elementos, es decir, por comprensión:

A = {provincias de la Mesopotamia Argentina}; se designa con x un elemento cualquiera del conjunto, es decir que x puede designar indistintamente a Entre Ríos, Corrientes o Misiones. Entonces decimos que x es una **variable**.

Mientras que se designa con: a = Entre Ríos, b = Corrientes, c = Misiones, a elementos constantes y bien determinados; x (o y, o z) designa a una cualquiera de las provincias de la Mesopotamia Argentina.

A = {x/x es una provincia de la Mesopotamia Argentina}

Se lee: "A es el conjunto de todos los x tales que **cada** x es una provincia de la Mesopotamia Argentina"

Lenguaje gráfico. Diagramas

Estas representaciones fueron ideadas por Euler y difundidas por John Venn. Por eso se las conoce con el nombre de diagramas o esquemas de Euler o de Venn.

Ejemplo:

En símbolos:

A = {abril, junio, septiembre, noviembre}

a = abril $\Rightarrow$ $a \in A$

b = junio $\Rightarrow$ $b \in A$

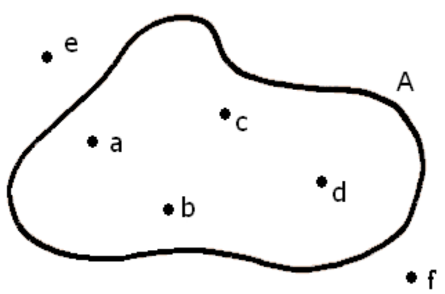
c = septiembre $\Rightarrow$ $c \in A$

d = noviembre $\Rightarrow$ $d \in A$

e = enero $\Rightarrow$ $e \notin A$

f = febrero $\Rightarrow$ $f \notin A$

En diagrama:



Algo más sobre determinación de conjuntos

Para poder decidir si un elemento pertenece o no a un conjunto, es necesario que dicho conjunto esté bien determinado.

Si proponemos a varias personas que enumeren los elementos de los conjuntos de la *ACTIVIDAD 8*, ¿para cuáles coincidirán todas las respuestas? Si en algún caso estas son distintas significa que ese conjunto no está bien definido y entonces, la elección de los elementos depende de un criterio personal.

Desde el punto de vista matemático **no** interesan los conjuntos mal definidos.

ACTIVIDAD 8

Indicar cuáles de los siguientes conjuntos están bien definidos:

A = {alumnos rubios de mi aula}
B = {los hombres altos de esta reunión}
C = {los hombres que tienen más de *1,75* m de altura}
D = {*5* lápices}
E = {esta goma, aquella lapicera}
F = {una goma, una lapicera}
G = {los colores primarios}
H = {los colores claros de un muestrario}
I = {los trajes caros}
J = {los autos veloces}

Conjuntos infinitos

Analicemos estos conjuntos:

A = {los socios del club River Plate de Argentina}
B = {las estrellas del universo}
C = {las fracciones positivas de denominador *3*}
D = {los números pares}

¿Podemos definirlos por extensión?

El conjunto *A* está definido por extensión en los padrones de socios del club.

Con respecto al conjunto *B*, parece imposible enumerar todas las estrellas; pero esta imposibilidad es sólo de orden físico.

En cambio, si procuramos enumerar los elementos de los conjuntos *C* y *D*, nunca llegaremos a nombrar el último elemento pues siempre es posible agregar uno más. Estos conjuntos se llaman **infinitos**.

En la notación simbólica se cierra la llave después de los puntos suspensivos para indicar que no hay último elemento.

Por ejemplo: $L = \{a, b; c; ...\}$

M = {fracciones positivas de denominador 3} = $\left\{\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{3}{3};\frac{4}{3};\frac{5}{3};\dots\right\}$

Los conjuntos que no son infinitos se llaman **finitos** y al anotarlos se escribe un último elemento a continuación de los puntos suspensivos antes de la llave de cierre.

$S = \{a;\ b;\ c; \ldots;\ n\}$ es un conjunto finito, donde n es el último elemento.

Los elementos en un conjunto finito pueden escribirse en cualquier orden. En un conjunto no pueden figurar elementos repetidos.

De acuerdo con el número de elementos, los conjuntos reciben nombres especiales:

Si el conjunto: tiene *2* elementos, es un conjunto **binario**;
tiene *1* elemento, es un **conjunto unitario**;
carece de elementos, es el **conjunto vacío**, se designa por $\varnothing$.

Puesto que carece de elementos que lo distingan, el conjunto vacío es siempre el mismo. Por eso decimos: *el* conjunto vacío y no *un* conjunto vacío.

ACTIVIDAD 9

a) ¿Cómo se representa el conjunto vacío en diagramas? ¿Cómo se expresa el conjunto vacío por comprensión?, ¿y por extensión?

b) *DISCUTIR*: Un profesor al corregir un trabajo pedido a sus estudiantes encontró que dos de ellos anotaron al conjunto vacío así:

$S = \{\varnothing\}$ $\qquad\qquad$ $S = \{0\}$

¿Te parece que son correctas?

Conjunto referencial o universal

El **referencial** o **universal** es el conjunto formado por todos los elementos del tema de referencia.

Por ejemplo: Si hablamos de ríos de Argentina, Brasil o Chile podemos fijar como referencial: {ríos americanos}. Si hablamos de libros de Leopoldo Lugones, de Jorge Luís Borges, de Julio Cortázar, de José Hernández o de Mujica Láinez, podemos considerar como referencial: {libros de autores argentinos}.

Se denota con un símbolo propio: **R** o $\mathcal{U}$ y se representa por un rectángulo para distinguirlo de los diagramas correspondientes a los demás conjuntos.

Por ejemplo:

Si el universal es: $\mathcal{U} = \{x \,/\, x$ es número menor o igual que $100\}$, no “existen” los números *101*; *200* ó *4394*.

En consecuencia, ningún punto puede representarse fuera del diagrama del referencial.

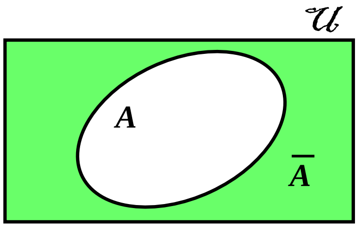
Complemento

Dado un conjunto universal $\mathcal{U}$ y un conjunto A, queda determinado otro conjunto formado por todos los elementos del universal que no pertenecen a A. Al conjunto así determinado se lo llama **complemento de** $\boldsymbol{A}$ y se simboliza como $\overline{A}$ o A^C.

En símbolos:

$$\overline{A} = A^C = \{x / x \notin A\} = \{x / \neg(x \in A)\}$$

Gráficamente:



Ejemplo:
Si $\mathcal{U}$ = {libros de mi biblioteca} y A = {libros **encuadernados** de mi biblioteca}, entonces: $\overline{A}$ = {libros **no encuadernados** de mi biblioteca}.

Inclusión

Dados los siguientes conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{N} \;/\; x$ es un número par de una cifra$\} = \{2;\ 4;\ 6;\ 8\}$

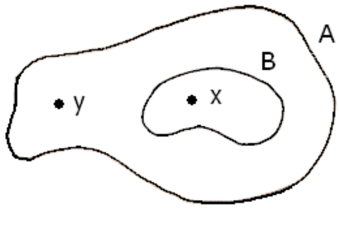
$B = \{x \in \mathbb{N} \;/\; x$ es un número par menor que $5\} = \{2;\ 4\}$

$C = \{x \in \mathbb{N} \;/\; x$ es un número par menor que $10\} = \{2;\ 4;\ 6;\ 8\}$

$D = \{x \in \mathbb{N} \;/\; x$ es un número par comprendido entre 4 y $6\} = \{\ \}$

Consideremos los siguientes casos:

1º) Todo elemento de B pertenece a A, pero existe algún elemento de A que no pertenece a B. Entonces, decimos que:



B es una parte propia de A; o
B es un subconjunto de A; o
B está estrictamente incluido en A.

Un conjunto B está **estrictamente incluido** en otro A si todo elemento de B pertenece a A pero existe por lo menos un elemento de A que no pertenece a B.
En símbolos, se escribe: $B \subset A$
y se lee: "B está estrictamente incluido en A".

$$B \subset A \Leftrightarrow \forall x \;/\; x \in B \Rightarrow x \in A \text{ pero } \exists y \;/\; y \in A \wedge y \notin B.$$

El símbolo $\forall$ se lee: "para todo" y el símbolo $\exists$ se lee: "existe por lo menos uno".

2º) Si comparamos el conjunto *C* con el *A* observamos que todo elemento de *C* pertenece a *A* y todo elemento de *A* pertenece a *C*. Entonces el conjunto *C* es **igual** al conjunto *A.*

Escribimos: $C = A$; en símbolos: $\forall x \,/\, x \in A \Leftrightarrow x \in C$.

Generalizamos la definición de inclusión diciendo:

Un conjunto está incluido en otro conjunto si y sólo si todo elemento del primero pertenece al segundo.

Esta condición es suficiente para afirmar que *C* está incluido en *A*, *en sentido amplio*, que se representa con el símbolo $\subseteq$, que lee" *está incluido o es igual a*".

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x \,/\, x \in B \Rightarrow x \in \mathrm{A}$$

El conjunto vacío está incluido en todo conjunto (es una implicación con el antecedente falso!!).

Dos conjuntos son iguales si y sólo si cada uno de ellos está incluido en el otro:

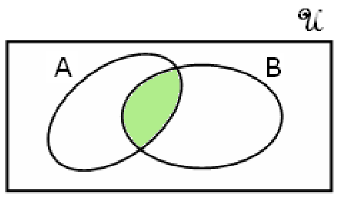
$$A = C \;\Leftrightarrow\; A \subseteq C \wedge C \subseteq A.$$

Operaciones entre Conjuntos

Una operación es una ley o regla que aplicada a un par de conjuntos da como resultado otro conjunto.

- *Intersección*

La ***intersección*** aplicada a los conjuntos *A* y *B* da como resultado otro conjunto cuyos elementos son los que pertenecen simultáneamente tanto a *A* como a *B*.



En símbolos:

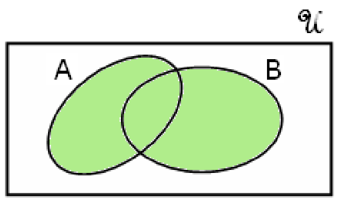
$$A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$$

Gráficamente corresponde a la región mostrada en sombreado en el diagrama de Venn.

Si dos conjuntos no tienen elementos comunes la intersección es vacía. En este caso los conjuntos se llaman *disjuntos*.

- *Unión*

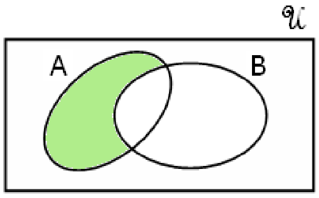
La ***unión*** aplicada a los conjuntos *A* y *B* da como resultado otro conjunto cuyos elementos son los que pertenecen a *A* o a *B* o a ambos conjuntos.



En símbolos:

$$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$$

- *Diferencia*

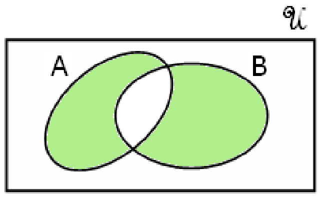


La ***diferencia*** aplicada a dos conjuntos A y B da como resultado otro conjunto cuyos elementos son todos aquellos que pertenecen a A pero no pertenecen a B.

En símbolos:

$$A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$$

- *Diferencia simétrica*



La ***diferencia simétrica*** aplicada a dos conjuntos A y B da como resultado el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A o bien a B.

En símbolos:

$$A \triangle B = \{x / x \in A \veebar x \in B\}$$

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES PROPUESTAS

Un poco de Lógica...

Actividad 1: Son proposiciones: *a*, *b*, *e*, *f*, *g*.

Actividad 2: *a*) V; *b*) F; *e*) F; *f*) V; *g*) no es posible determinar su valor de verdad.

Actividad 3: *a*) $7 \leq 4$; *b*) La Luna no es un planeta; *c*) Francia no es un país asiático.

Actividad 4: *a*) F; *b*) V; *c*) F.

Actividad 5: *a*) V; *b*) V; *c*) F.

Actividad 6: *a*) V; *b*) F; *c*) V; *d*) F.

Actividad 7: *a*) V; *b*) V; *c*) F.

Un poco de Conjuntos...

Actividad 8: A cargo del alumno: resolver, y consultar con los docentes.

Actividad 9: A cargo del alumno.